有限待ち合い室をもつ集団到着待ち行列の解析(待ち行列理論とその応用)

馬場, 裕

数理解析研究所講究録
490 巻 1983 年 35-47

有限待ち合い室をもつ集団到着待ち行列の解析

東工大 理学部　馬場 裕 (Yutaka Baba)

1. はじめに

今までに研究された有限待ち合い室をもつ集団到着待ち行列モデルには、Kabak [6], [7], Manfield [8], Mejtzler [9] 等があるが、これらはいずれもマルコフモデルであり、ノンマルコフモデルを解析したものは Van Hoorn [11] があるだけである。

本報告では、到着間隔分布とサービス分布の一方が指数分布で他の一方が一般分布である待ち行列モデルのうち、$M^X/G/1/m+1$ と $GI^X/M/S/S$ の二つのモデルについて、定常分布や待ち時間分布を、二つの batch acceptance strategy (partially rejected model と totally rejected model) について、補助変数を用いて解析を行なう。

2. $M^X/G/1/m+1$ の解析

定義

m ： 待ち室数（最大 $m+1$ 人系内に入れる）

$\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ ： バッチサイズの分布

λ ： バッチの到着率

$B(x)$ ： サービス分布の分布関数

$b(x)$ ： サービス分布の密度関数

$N(t)$ ： 時刻 t における系内客数

$U(t)$ ： 時刻 t におけるサービス中の客の残りサービス時間

とする。また到着したバッチのサイズが残っている待ち室数よりも大きい時は、残りの待ち室に入れる客だけ系内に入り余った客は退去する。この方策を partially rejected model と呼ぶ。一方、到着したバッチのサイズが残っている待ち室よりも大きい時は、到着したバッチ全体の客が系外に退去する。この方策を totally rejected model と呼ぶ。この節では、この二つの batch acceptance strategy について解析する。

(1) partially rejected model

$$P_0(t)=P(N(t)=0),\ P_k(u,t)du=P((N(t)=k)\cap(u<U(t)\le u+du))$$

$$u\ge 0,\quad k=1,2,\cdots,m+1 \qquad (2.1)$$

とおくと、次の偏微分差分方程式系を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t}P_0(t) = -\lambda P_0(t) + P_1(0,t) \tag{2.2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial u}\right)P_1(u,t) = -\lambda P_1(u,t) + P_0(t)\lambda g_1 b(u) + P_2(0,t)\, b(u) \tag{2.3}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial u}\right)P_k(u,t) = -\lambda P_k(u,t) + P_0(t)\lambda g_k b(u) + \sum_{i=1}^{k-1} P_i(u,t)\lambda g_{k-i} + P_{k+1}(0,t)\, b(u), \quad k=2,\cdots,m \tag{2.4}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial u}\right)P_{m+1}(u,t) = P_0(t)\sum_{i=m+1}^{\infty}\lambda g_i b(u) + \sum_{i=1}^{m} P_i(u,t)\sum_{j=m-i+1}^{\infty}\lambda g_j \tag{2.5}$$

定常状態において $(N(t), U(t))$ の漸近分布

$$P_0 = \lim_{t\to\infty} P_0(t), \qquad P_k(u) = \lim_{t\to\infty} P_k(u,t), \qquad k=1,2,\cdots,m+1$$

(2.6) の存在を仮定し.

$$B^*(s) = \int_0^\infty e^{-su} b(u)\, du = \int_0^\infty e^{-su} dB(u) \tag{2.7}$$

$$P_k^*(s) = \int_0^\infty e^{-su} P_k(u)\, du, \qquad k = 1,2,\cdots,m+1 \tag{2.8}$$

とすれば (2.2) − (2.5) より

$$\lambda P_0 = P_1(0) \tag{2.9}$$

$$(\lambda - s)P_1^*(s) = P_0\lambda g_1 B^*(s) + P_2(0)B^*(s) - P_1(0) \tag{2.10}$$

$$(\lambda - s)P_k^*(s) = P_0\lambda g_k B^*(s) + \sum_{i=1}^{k-1} P_i^*(s)\lambda g_{k-i} + P_{k+1}(0)B^*(s) - P_k(0), \quad k=2,\cdots,m \tag{2.11}$$

$$-sP_{m+1}^*(s) = P_0\sum_{i=m+1}^{\infty}\lambda g_i B^*(s) + \sum_{i=1}^{m} P_i^*(s)\sum_{j=m-i+1}^{\infty}\lambda g_j - P_{m+1}(0) \tag{2.12}$$

を得る。

(2.10) に $s=0$ を代入して

$$\lambda P_1^*(0) = \lambda g_1 P_0 + P_2(0) - P_1(0) \qquad (2.13)$$

を得る。さらに (2.10) に $S=\lambda$ を代入して

$$0 = \lambda g_1 P_0 B^*(\lambda) + P_2(0) B^*(\lambda) - P_1(0) \qquad (2.14)$$

を得る。(2.9), (2.13), (2.14) より次の関係を得る。

$$P_2(0) = \frac{\{1 - g_1 B^*(\lambda)\}\lambda P_0}{B^*(\lambda)} \qquad (2.15)$$

$$P_1^*(0) = \frac{\{1 - B^*(\lambda)\} P_0}{B^*(\lambda)} \qquad (2.16)$$

さらに (3.11) に $S=\lambda$ を代入して

$$P_{k+1}(0) = \frac{P_k(0) - \lambda g_k B^*(\lambda) P_0 - \sum_{i=1}^{k-1} P_i^*(\lambda) \lambda g_{k-i}}{B^*(\lambda)}, \quad k=2, \cdots, m. \qquad (2.17)$$

を得る。(2.17)より、$P_k(0)$ から $P_{k+1}(0)$ を求めるには、$P_i^*(\lambda)$, $(i=1, \cdots, k-1)$ が必要である。(2.10), (2.11)より

$$P_1^{*(n)}(\lambda) = -\frac{P_0 B^{*(n+1)}(\lambda)}{(n+1) B^*(\lambda)}, \quad n=0, 1, \cdots, m \qquad (2.18)$$

$$P_k^{*(n)}(\lambda) = -\frac{1}{n+1}\Big[\lambda g_k B^{*(n+1)}(\lambda) + \sum_{i=1}^{k-1} P_i^{*(n+1)}(\lambda) \lambda g_{k-i}$$
$$+ P_{k+1}(0) B^{*(n+1)}(\lambda)\Big], \; k=2, \cdots, m; \; n=0, 1, \cdots, m+1-k \qquad (2.19)$$

だから、(2.17)〜(2.19)により $P_k(0)$, $k=3, \cdots, m, m+1$ は P_0を用いて表現できる。

また (2.11)と (2.12) の導関数に $S=0$ を代入すると

$$\lambda P_k^*(0) = \lambda g_k P_0 + \sum_{i=1}^{k-1} P_i^*(0) \lambda g_{k-i} + P_{k+1}(0) - P_k(0), \; k=2, \cdots, m \qquad (2.20)$$

$$P_{m+1}^*(0) = -P_0 \sum_{i=m+1}^{\infty} \lambda g_i B^{*(1)}(0) - \sum_{i=1}^{m} P_i^{*(1)}(0) \sum_{j=m-i+1}^{\infty} \lambda g_j \qquad (2.21)$$

さらに (2.10) と (2.11) を微分して $s=0$ を代入すると

$$P_1^{*(1)}(0)=\frac{1}{\lambda}P_1^*(0)+P_0\lambda g_1 B^{*(1)}(0)+P_2(0)B^{*(1)}(0) \tag{2.22}$$

$$P_k^{*(1)}(0)=\frac{1}{\lambda}P_k^*(0)+P_0\lambda g_k B^{*(1)}(0)+\sum_{i=1}^{k-1}P_i^{*(1)}(0)\lambda g_{k-i} + P_{k+1}(0)B^{*(1)}(0),\quad k=2,\cdots,m \tag{2.23}$$

を得る。(2.21) の右辺は (2.22) と (2.23) によって計算できる。任意時点において i 人 $(1\leq i\leq m+1)$ の客がいる確率は $P_i^*(0)$ であり、システムが空である確率は P_0 だから、任意時点における定常確率分布は正規化条件

$$P_0+\sum_{i=1}^{m+1}P_i^*(0)=1 \tag{2.24}$$

により決定される。

さらにサービス終了直後に系内に i 人いる確率は

$$g_i=\frac{P_{i+1}(0)}{\sum_{k=1}^{m+1}P_k(0)},\quad i=0,\cdots,m \tag{2.25}$$

で与えられる。この計算は (2.9), (2.15), (2.17) による。また

$W_F^*(s)$: 到着したバッチの最初の客の待ち時間のラプラス変換

$W_A^*(s)$: 到着した任意の客の待ち時間のラプラス変換

とすると

$$W_F^*(s)=\frac{P_0+\sum_{i=1}^{m}P_i^*(s)[B^*(s)]^{i-1}}{1-P_{m+1}^*(0)} \tag{2.26}$$

$$W_A^*(S)=\frac{P_0\sum_{i=1}^{m+1}r_i[B^*(S)]^{i-1}+\sum_{i=1}^{m}P_i^*(S)\sum_{j=1}^{m+1-i}r_j[B^*(S)]^{i+j-2}}{P_0\sum_{i=1}^{m+1}r_i+\sum_{i=1}^{m}P_i^*(0)\sum_{j=1}^{m+1-i}r_j} \qquad (2.27)$$

ただし $r_n=\frac{1}{g}\sum_{i=n}^{\infty}g_i$　$(g=\sum_{i=1}^{\infty}ig_i)$ によって表される。

(2) <u>totally rejected model</u>

(1)の場合と同様にして、次の偏微分差分方程式系を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t}P_0(t)=-\sum_{i=1}^{m+1}\lambda g_i P_0(t)+P_1(0,t) \qquad (2.28)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial u}\right)P_1(u,t)=-\sum_{i=1}^{m}\lambda g_i P_1(u,t)+P_0(t)\lambda g_1 b(u)+P_2(0,t)b(u) \qquad (2.29)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial u}\right)P_k(u,t)=-\sum_{i=1}^{m+1-k}\lambda g_i P_k(u,t)+P_0(t)\lambda g_k b(u)+\sum_{i=1}^{k-1}P_i(u,t)\lambda g_{k-i}+P_{k+1}(0,t)b(u)$$

$$k=2,\cdots,m \qquad (2.30)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial u}\right)P_{m+1}(u,t)=P_0(t)\lambda g_{m+1}b(u)+\sum_{i=1}^{m}P_i(u,t)\lambda g_{m+1-i} \qquad (2.31)$$

(2.28)～(2.31)より

$$\sum_{i=1}^{m+1}\lambda g_i P_0=P_1(0) \qquad (2.32)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda g_i-S\right)P_1^*(S)=P_0\lambda g_1 B^*(S)+P_2(0)B^*(S)-P_1(0) \qquad (2.33)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m+1-k}\lambda g_i-S\right)P_k^*(S)=P_0\lambda g_k B^*(S)+\sum_{i=1}^{k-1}P_i^*(S)\lambda g_{k-i}$$

$$+P_{k+1}(0)B^*(s)-P_k(0) \qquad k=2,\cdots,m \qquad (2.34)$$

$$-sP^*_{m+1}(s)=P_0\lambda g_{m+1}B^*(s)+\sum_{i=1}^{m}P_i^*(s)\lambda g_{m+1-i}-P_{m+1}(0) \qquad (2.35)$$

を得る。またこのモデルが解析できるように $g_i \neq 0$ $(i=1,\cdots,m+1)$ を仮定する。バッチサイズの分布が幾何分布の時、この仮定は満たされる。(2.33) に $s=\sum_{i=1}^{m}\lambda g_i$, $s=0$ を代入し、(2.32)を使って

$$P_2(0)=\frac{\lambda P_0\{\sum_{i=1}^{m+1}g_i-g_1B^*(\sum_{j=1}^{m}\lambda g_j)\}}{B^*(\sum_{j=1}^{m}\lambda g_j)} \qquad (2.36)$$

$$P_1^*(0)=\frac{\sum_{i=1}^{m+1}g_iP_0\{1-B^*(\sum_{j=1}^{m}\lambda g_j)\}}{\sum_{i=1}^{m}g_iB^*(\sum_{j=1}^{m}\lambda g_j)} \qquad (2.37)$$

を得る。次に (2.34) に $s=\sum_{i=1}^{m+1-k}\lambda g_j$ を代入して

$$P_{k+1}(0)=\frac{P_k(0)-\lambda g_kB^*(\sum_{j=1}^{m+1-k}\lambda g_j)-\sum_{i=1}^{k-1}P_i^*(\sum_{j=1}^{m+1-k}\lambda g_j)\lambda g_{k-i}}{B^*(\sum_{j=1}^{m+1-k}\lambda g_j)}$$

$$k=2,3\cdots,m \qquad (2.38)$$

を得る。$P_k(0)$ から $P_{k+1}(0)$ を再帰的に求めるのに $P_i^*(\sum_{j=1}^{m+1-k}\lambda g_j)$ $(i=1,\cdots,k-1)$ が必要である。(2.33), (2.34) より

$$P_1^*(\sum_{j=1}^{m+1-k}\lambda g_j)=\frac{P_0\lambda g_1B^*(\sum_{j=1}^{m+1-k}\lambda g_j)+P_2(0)B^*(\sum_{j=1}^{m+1-k}\lambda g_j)-P_1(0)}{\sum_{j=m+2-k}^{m}\lambda g_j}$$

$$(2.39)$$

$$P_i^*\left(\sum_{j=1}^{m+1-k}\lambda g_j\right)=\frac{1}{\sum_{j=m+2-k}^{m+1-i}\lambda g_j}\left[P_0\lambda g_i B^*\left(\sum_{j=1}^{m+1-k}\lambda g_j\right)+\sum_{l=1}^{i-1}P_l^*\left(\sum_{j=1}^{m+1-k}\lambda g_j\right)\lambda g_{i-l}\right.$$

$$\left.+P_{i+1}(0)B^*\left(\sum_{j=1}^{m+1-k}\lambda g_j\right)-P_i(0)\right]\quad i=2,\cdots,k-1 \quad (2.40)$$

が得られるから (2.39), (2.40) により $P_i^*(\sum_{j=1}^{m+1-k}\lambda g_j)$ $(i=1,\cdots,k-1)$ を求めることができる。

(2.34) に $S=0$ を代入して次の式を得る。

$$P_k^*(0)=\frac{P_0\lambda g_k+\sum_{i=1}^{k-1}P_i^*(0)\lambda g_{k-i}+P_{k+1}(0)-P_k(0)}{\sum_{i=1}^{m+1-k}\lambda g_i}\quad (k=2,\cdots,m) \quad (2.41)$$

また (2.35) を S で微分して $S=0$ を代入して次の式を得る。

$$P_{m+1}^*(0)=-P_0\lambda g_{m+1}B^{*(1)}(0)+\sum_{i=1}^{m}P_i^{*(1)}(0)\lambda g_{m-i+1} \quad (2.42)$$

次に (2.33) と (2.34) を S で微分して $S=0$ を代入すると

$$P_1^{*(1)}(0)=\frac{P_0\lambda g_1 B^{*(1)}(0)+P_2(0)B^{*(1)}(0)+P_1^*(0)}{\sum_{i=1}^{m}\lambda g_i} \quad (2.43)$$

$$P_k^{*(1)}(0)=\frac{1}{\sum_{i=1}^{m+1-k}\lambda g_i}\left[P_0\lambda g_k B^{*(1)}(0)+\sum_{i=1}^{k-1}P_i^{*(1)}(0)\lambda g_{k-i}\right.$$

$$\left.+P_{k+1}(0)B^{*(1)}(0)+P_k^*(0)\right],\quad k=2,\cdots,m \quad (2.44)$$

(2.43), (2.44) を (2.42) に代入して $P_{m+1}^*(0)$ を得る。最後に (2.37), (2.41), (2.42) と正規化条件

$$P_0+\sum_{i=1}^{m+1}P_i^*(0)=1 \quad (2.45)$$

より任意時点における定常状態確率を求めることができる。

(1) の場合と同様にして、サービス終了直後に系内に i 人 ($1 \le i \le m$) いる確率は (2.32), (2.36), (2.38) によって求めることができる。

また

$W_B^*(s)$ ： 到着したバッチの最初の客の待ち時間のラプラス変換

とすると

$$W_B^*(s) = \frac{P_0 \sum_{i=1}^{m+1} g_i + \sum_{i=1}^{m} P_i^*(s) [B^*(s)]^{i-1} \sum_{j=1}^{m+1-i} g_j}{P_0 \sum_{i=1}^{m+1} g_i + \sum_{i=1}^{m+1} P_i^*(0) \sum_{j=m+2-i}^{\infty} g_j} \qquad (2.46)$$

となる。

3. $GI^X/M/s/s$ の解析

定義

$A(x)$ ： 到着時間間隔の分布関数

$a(x)$ ： 到着時間間隔の密度関数

$N(t)$ ： 時刻 t における系内数

$U(t)$ ： 時刻 t における経過到着時間

$\frac{1}{\mu}$ ： サービス分布の平均

$\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ ： バッチサイズの分布

$\lambda(x) = \frac{a(x)}{\bar{A}(x)}$ （ただし $\bar{A}(x) = 1 - A(x)$）

とし，

$$P_k(x,t)\,dx = P((N(t)=k)\cap(x<U(t)\leq x+dx))$$

$$(k=0,1,\cdots,S) \qquad (3.1)$$

とおくと，次の偏微分差分方程式系を得る。

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\right)P_k(x,t) = -\{\lambda(x)+k\mu\}P_k(x,t)+(k+1)\mu P_{k+1}(x,t)$$

$$(0\leq k\leq S-1) \qquad (3.2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\right)P_S(x,t) = -\{\lambda(x)+S\mu\}P_S(x,t) \qquad (3.3)$$

定常状態において（$N(t)$, $U(t)$）の漸近分布

$$P_k(x) = \lim_{t\to\infty} P_k(x,t) \quad (0\leq k\leq S) \qquad (3.4)$$

の存在を仮定すると (3.2), (3.3) より

$$\frac{d}{dx}P_k(x)+\{\lambda(x)+k\mu\}P_k(x) = (k+1)\mu P_{k+1}(x) \quad (0\leq k\leq S-1)$$

$$(3.5)$$

$$\frac{d}{dx}P_S(x)+\{\lambda(x)+S\mu\}P_S(x)=0 \qquad (3.6)$$

を得る。(3.5), (3.6) より

$$P_k(x)=\bar{A}(x)\sum_{i=0}^{S-k}(-1)^i\binom{k+i}{i}C_{k+i}\exp\{-(k+i)\mu x\}$$

（C_{k+i} は積分定数） $(0\leq k\leq S)$ (3.7)

を得ることができる。（証明は数学的帰納法による）

$A^*(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dA(x)$ とおけば，(3.7) より次のように定常状態確率を計算することができる。

$$P_k^* = \int_0^\infty P_k(x)\,dx = \sum_{i=0}^{S-k}(-1)^i\binom{k+i}{i}C_{k+i}\left\{\frac{1}{(k+i)\mu} - \frac{1}{(k+i)\mu}A^*((k+i)\mu)\right\}$$

$$(1 \leq k \leq S) \qquad (3.8)$$

$$P_0^* = \int_0^\infty P_0(x)\,dx = \frac{C_0}{\lambda} + \sum_{i=1}^{S}(-1)^i C_i\left\{\frac{1}{i\mu} - \frac{1}{i\mu}A^*(i\mu)\right\} \qquad (3.9)$$

また正規化条件 $\sum_{k=0}^{S}P_k^*=1$ と(3.8), (3.9)より $C_0=\lambda$ が証明できる。(ただし $\frac{1}{\lambda}=\int_0^\infty \bar{A}(x)\,dx$, 到着時間間隔の平均)

最後に積分定数 C_i ($i=1,\cdots,S$) の決定は、次に述べる境界条件によるが、これは partially rejected model と totally rejected model の場合が異なる。

(1) partially rejected model の境界条件

$$P_0(0)=0 \qquad (3.10)$$

$$P_k(0)=\int_0^\infty \sum_{i=0}^{k-1} P_i(x)\, g_{k-i}\,\lambda(x)\,dx \quad (1\leq k\leq S-1) \qquad (3.11)$$

$$\left(\sum_{i=0}^{S-k}(-1)^i\binom{k+i}{i}C_{k+i} = \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{S-i}(-1)^j\binom{i+j}{j}C_{i+j}A^*((i+j)\mu)\,g_{k-i}\right)$$

$$(3.12)$$

$$P_S(0)=\int_0^\infty\left\{\sum_{i=0}^{k-1}P_i(x)\sum_{n=S-i}^{\infty}g_n + P_S(x)\right\}\lambda(x)\,dx \qquad (3.13)$$

$$\left(C_S=\sum_{i=0}^{S-1}\sum_{n=S-i}^{\infty}g_n\sum_{j=0}^{S-i}(-1)^j\binom{i+j}{j}C_{i+j}A^*((i+j)\mu)+C_SA^*(S\mu)\right)$$

$$(3.14)$$

積分定数 C_i ($i=0,1,\cdots,S$) は $C_0=\lambda$ と連立方程式 (3.12), (3.14) を解けば求まる。

(2) totally rejected model の境界条件

$$P_0(0)=\int_0^\infty P_0(x)\lambda(x)\sum_{i=S+1}^{\infty} g_i\,dx \qquad (3.15)$$

$$\left(\sum_{j=0}^{S}(-1)^j C_j=\sum_{j=0}^{S}(-1)^j C_j A^*(j\mu)\right) \qquad (3.16)$$

$$P_k(0)=\int_0^\infty\sum_{i=0}^{k-1}P_i(x)\lambda(x)g_{k-i}\,dx+\int_0^\infty P_k(x)\lambda(x)\sum_{i=S+1+k}^{\infty} g_i\,dx$$

$$(1\leq k\leq S) \qquad (3.17)$$

$$\left(\sum_{j=0}^{S-k}(-1)^j\binom{k+j}{j}C_{k+j}=\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{S-i}(-1)^j\binom{i+j}{j}C_{i+j}A^*((i+j)\mu)\right.$$
$$\left.+\sum_{j=0}^{S-k}(-1)^j\binom{k+j}{j}C_{k+j}\,A^*((k+j)\mu)\sum_{i=S+1-k}^{\infty}g_i\right)$$

$$(3.18)$$

積分定数 C_i $(i=0,1,\cdots,S)$ は $C_0=\lambda$ と連立方程式 (3.16), (3.18) を解けば求まる。

4．結論

本報告では、到着時間間隔とサービス分布のいずれか一方が指数分布でもう一方が一般分布である有限待ち合い室をもつ集団到着待ち行列のうち $M^X/G/1/m+1$ と $GI^X/M/S/S$ の定常分布や待ち時間分布等を解析した。今後の課題としては、$M^X/G/S/S$ 等の解析が重要と思われる。

References

[1] Burke, P. J.: Delays in Single Server Queues with Batch Input. Opns. Res. vol. 23 (1975), 830-833.

[2] Chu, W. W.: Buffer Behaviour for Batch Poisson Arrivals and Single Constant Output. IEEE, Trans. Commun. vol. 18 (1970), 613-618.

[3] Chu, W. W. and Konheim, A. G.: On the Analysis and Modeling of a Class of Computer Communication Systems. IEEE, Trans. Commun. vol. 20 (1972), 645-660.

[4] Hokstad, P.: Asymptotic Behaviour of the $E_k/G/1$ Queue with Finite Waiting Room. J. Appl. Prob. vol. 14 (1977), 358-366.

[5] Henderson, W.: Alternative Approaches to the Analysis of the M/G/1 and GI/M/1 Queues. J. Oper. Res. Soc. Japan, vol. 15 (1972), 92-101.

[6] Kabak, I. W.: Blocking and Delays in $M^{(n)}/M/c$ Bulk Queueing Systems. Opns. Res. vol. 16 (1968), 830-840.

[7] Kabak, I. W.: Blocking and Delays in $M^{(X)}/M/c$ Bulk Arrival Queueing Systems. Management Science, vol. 17 (1970), 112-115.

[8] Manfield, D. R. and Tran-Gia, P.: Analysis of a Finite Storage System with Batch Input Arising out of Message Packetization. IEEE, Trans. Commun. vol. 30 (1982), 456-463.

[9] Mejtzler, D.: A Generalization of Erlan's Loss Formula in Queueing. J. Appl. Prob. vol. 5 (1968), 143-157.

[10] Ohsone, T.: The $GI/E_k/1$ with Finite Waiting Room. J. Oper. Res. Soc. Japan, vol. 24 (1981), 215-226.

[11] Van Hoorn, M. H.: Algorithms for the State Probabilities in a General Class of Single Server Queueing Systems with Group Arrivals. Management Science, vol. 27 (1981), 1178-1187.